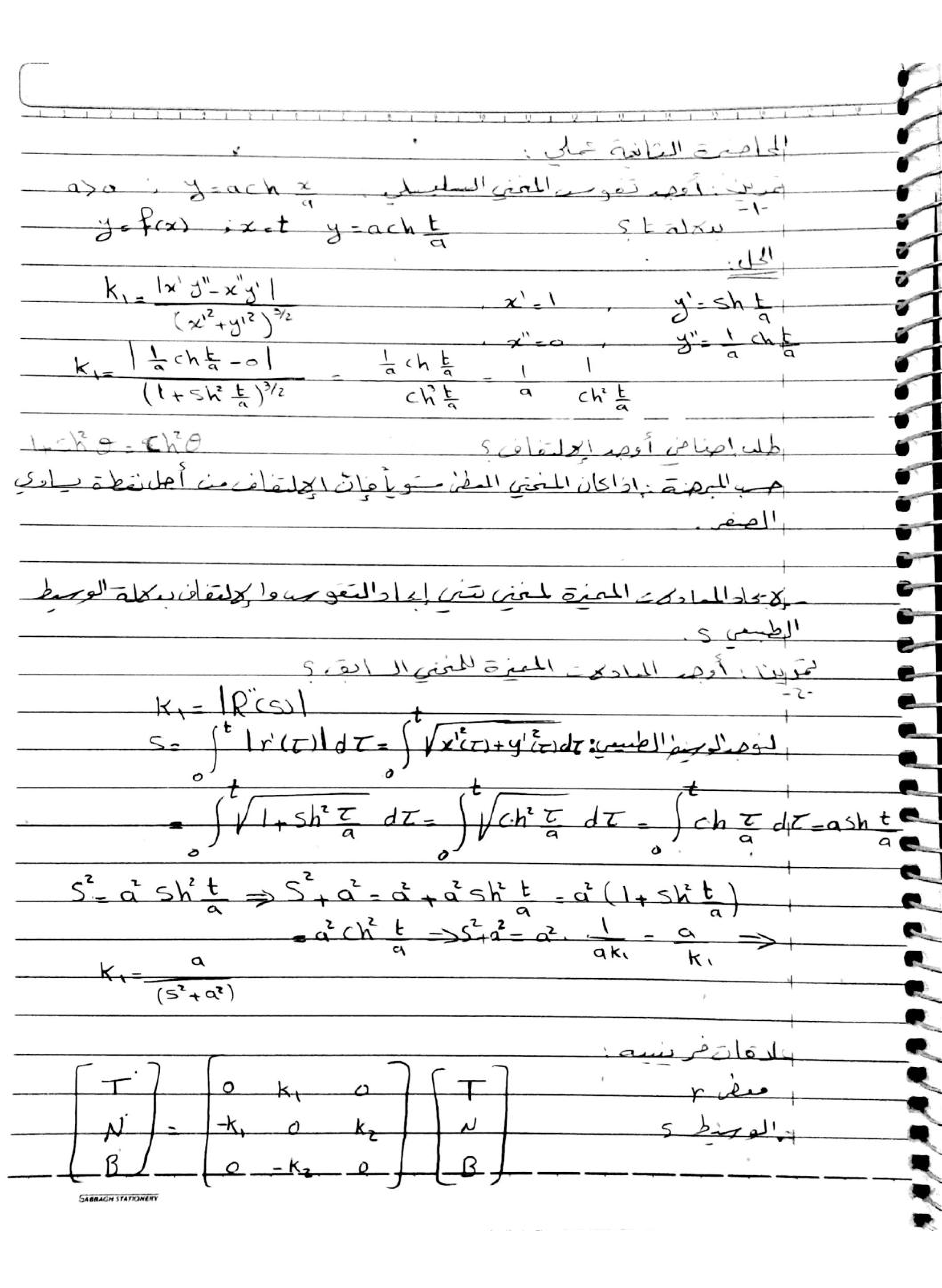


المحاضرة الثانية عملي :

تمرين: أوجد تقوس المنحني السلسلي $y = a\,ch\frac{x}{a}$ ، $a>0$ -1-

بدلالة t ؟ $y = a\,ch\frac{t}{a}$ ، $x = t$; $y = f(x)$

الحل:

$k_1 = \frac{|x'y''-x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}$, $x' = 1$, $y' = sh\frac{t}{a}$

$x'' = 0$, $y'' = \frac{1}{a}ch\frac{t}{a}$

$k_1 = \frac{|\frac{1}{a}ch\frac{t}{a} - 0|}{(1+sh^2\frac{t}{a})^{3/2}} = \frac{\frac{1}{a}ch\frac{t}{a}}{ch^3\frac{t}{a}} = \frac{1}{a}\frac{1}{ch^2\frac{t}{a}}$

$1+sh^2\theta = ch^2\theta$

طلب إضافي: أوجد الالتفاف ؟

حسب المبرهنة: إذا كان المنحني المعطى مستوياً فإن الالتفاف من أجل نقطة يساوي الصفر.

لإيجاد المعادلات المميزة لمنحني تعني إيجاد التقوس والالتفاف بدلالة الوسيط الطبيعي s.

تمرين: أوجد المعادلات المميزة للمنحني السابق؟ -2-

$k_1 = |R''(s)|$

لنوجد الوسيط الطبيعي: $s = \int_0^t |r'(\tau)|\,d\tau = \int_0^t \sqrt{x'^2(\tau)+y'^2(\tau)}\,d\tau$

$= \int_0^t \sqrt{1+sh^2\frac{\tau}{a}}\,d\tau = \int_0^t \sqrt{ch^2\frac{\tau}{a}}\,d\tau = \int_0^t ch\frac{\tau}{a}\,d\tau = a\,sh\frac{t}{a}$

$s^2 = a^2 sh^2\frac{t}{a} \Rightarrow s^2 + a^2 = a^2 + a^2 sh^2\frac{t}{a} = a^2(1+sh^2\frac{t}{a})$

$= a^2 ch^2\frac{t}{a} \Rightarrow s^2 + a^2 = a^2 \cdot \frac{1}{ak_1} = \frac{a}{k_1} \Rightarrow$

$k_1 = \frac{a}{(s^2+a^2)}$

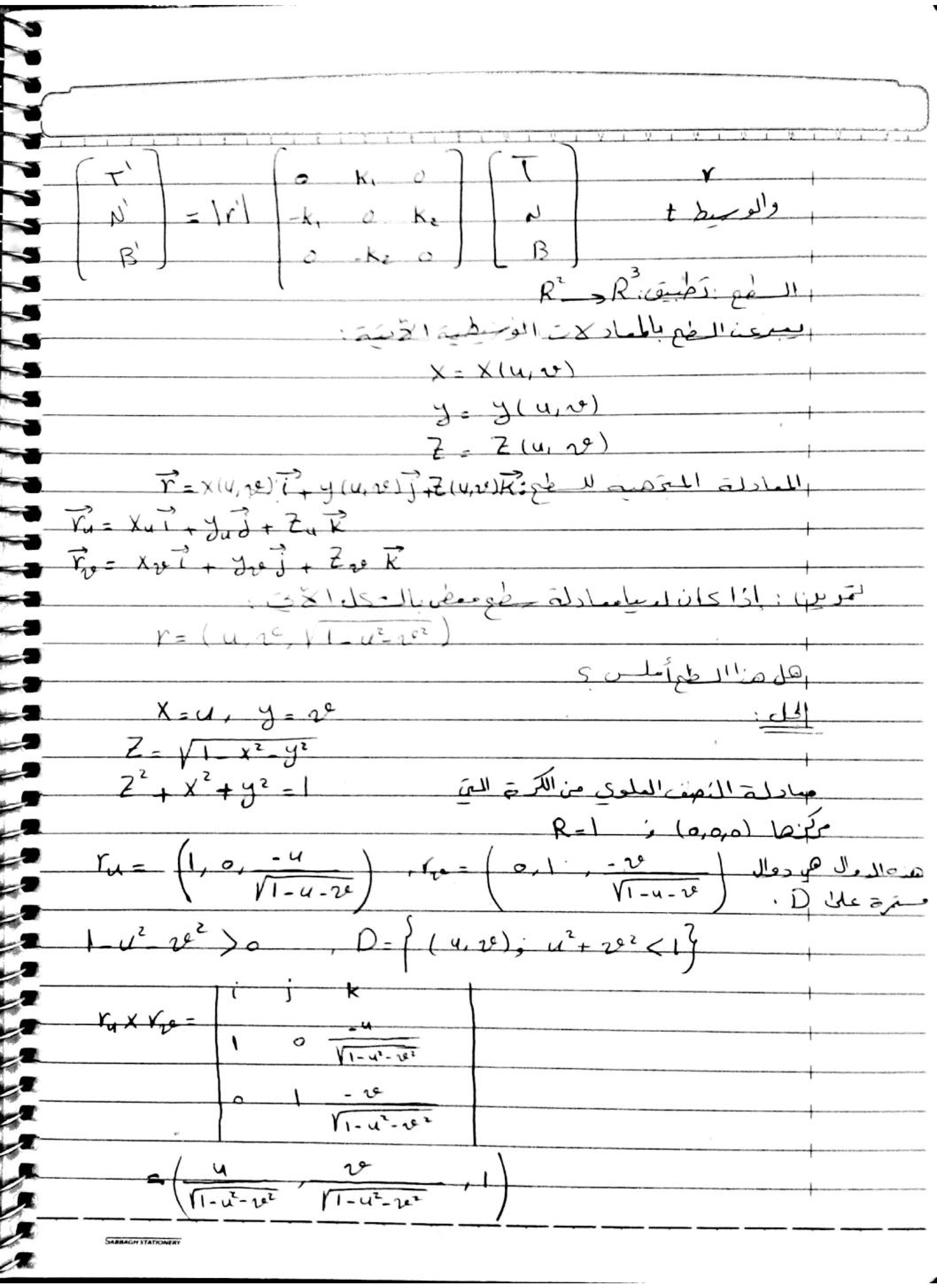
علاقات فرينيه:

معطى r

الوسيط s

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

SABBAGH STATIONERY



r

والوسيط t

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = |r'| \begin{bmatrix} 0 & K_1 & 0 \\ -K_1 & 0 & K_2 \\ 0 & -K_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

السطح: تطبيق $R^2 \to R^3$

يعرف السطح بالمعادلات الوسيطية الآتية:

$$x = x(u,v)$$
$$y = y(u,v)$$
$$z = z(u,v)$$

المعادلة المتجهية للسطح: $\vec{r} = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}$

$$\vec{r}_u = x_u\vec{i} + y_u\vec{j} + z_u\vec{k}$$
$$\vec{r}_v = x_v\vec{i} + y_v\vec{j} + z_v\vec{k}$$

تمرين: إذا كان لدينا معادلة سطح معطى بالشكل الآتي:

$$r = (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2})$$

هل هذا السطح أملس؟

الحل:

$$x = u, \quad y = v$$
$$z = \sqrt{1-x^2-y^2}$$
$$z^2 + x^2 + y^2 = 1$$

معادلة النصف العلوي من الكرة التي مركزها $(0,0,0)$ و $R=1$

$$r_u = \left(1, 0, \frac{-u}{\sqrt{1-u-v}}\right), \quad r_v = \left(0, 1, \frac{-v}{\sqrt{1-u-v}}\right)$$

هذه الدوال هي دوال مستمرة على D.

$$1-u^2-v^2 > 0, \quad D = \{(u,v);\ u^2+v^2 < 1\}$$

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{-u}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \\ 0 & 1 & \frac{-v}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, \frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, 1\right)$$

تمرين: أثبت أنّ سطح الطارة هو سطح نظامي:

$$x = (a + b\sin v)\cos u$$
$$y = (a + b\sin v)\sin u$$
$$z = b\cos v$$

الحل:

$$r'_u = \left(-(a+b\sin v)\sin u,\ (a+b\sin v)\cos u,\ 0\right)$$
$$r_v = \left(b\cos u\cos v,\ b\sin u\cdot\cos v,\ -b\sin v\right)$$

لأن الدوال $x(u,v), y(u,v), z(u,v) \in C^\infty$

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -(a+b\sin v)\sin u & (a+b\sin v)\cos u & 0 \\ b\cos u\cos v & b\sin u\cos v & -b\sin v \end{vmatrix}$$

$$= \Big\{ -b(a+b\sin v)\cos u \underset{\sin v}{\sin v},\ -b(a+b\sin v)\sin u \underset{\sin v}{\sin v},\ -b(a+b\sin v)\sin^2 u\cos v - b\cos^2 u\cos v(a+b\sin v) \Big\}$$

$$-b(a+b\sin v)\cos v$$

$$= -b(a+b\sin v)(\cos u, \sin u, \cos v)$$

$$|r_u \times r_v| = b(a+b\sin v) \neq 0$$

السطح الدوراني:

يكون السطح دوراني إذا أمكن كتابته بالشكل:

$$X = \phi(u)\cos v$$
$$Y = \phi(u)\sin v$$
$$Z = \psi(u)$$

المستوي المماس والمستقيم الناظم لسطح أملس؟

معادلة المستقيم الناظم:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u|_{(u_0,v_0)} & y_u|_{(u_0,v_0)} & z_u|_{(u_0,v_0)} \\ x_v|_{(u_0,v_0)} & y_v|_{(u_0,v_0)} & z_v|_{(u_0,v_0)} \end{vmatrix} = 0$$

المستقيم الناظم:

$$\frac{X-x_0}{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}_{(u_0,v_0)}} = \frac{Y-y_0}{\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}_{(u_0,v_0)}} = \frac{Z-z_0}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}_{(u_0,v_0)}}$$

تمرين: أوجد معادلة المستوي المماس والمستقيم الناظم عند النقطة $(1,1,0)$ للسطح المعطى؟ $r = (u, v, u^2 - v^2)$

$$\begin{vmatrix} X-1 & Y-1 & Z \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

; $r_u (1, 0, 2u)\Big|_{(u_0,v_0)=(1,1)} = (1,0,2)$

, $r_v (0, 1, -2v)\Big|_{(1,1)} = (0,1,-2)$

$-2(X-1) - (Y-1)(-2) + Z = 0$

معادلة المستوي المماس: $-2X + 2Y + Z = 0$

معادلة المستقيم الناظم:

$$\frac{X-1}{-2} = \frac{Y-1}{2} = \frac{Z}{1}$$

تمرين: ليكن لدينا السطح التالي: $r = (u, v, u^2 - v^2)$

أوجد المنحنيات ذات الوسيط u، المنحنيات ذات الوسيط v

$u = u_0$ $\quad$ $v = v_0$

الحل:

منحنيات وسيط u: $r(u, v_0, u^2 - v_0^2)$; $X = u$ $\quad y = v_0$ $\quad \boxed{Z = X^2 - v_0^2}$

معادلة قطع مكافئ

منحنيات الوسيط v: $r(u_0, v, u_0^2 - v^2)$ $\quad X = u_0$ $\quad y = v$ $\quad \boxed{Z = u_0^2 - y^2}$

معادلة قطع مكافئ